



Ministério das Minas e Energia
ELETROBRÁS - CIGRÉ



Entidade Coordenadora

São Paulo, 4 a 8 de maio de 1986

SP/GOP/15

Grupo X

**Operação de Sistemas Elétricos
(GOP)**

**Previsão Multivariada das Afluências a
Aproveitamentos Hidroelétricos**

Eng.º Gerson Couto de Oliveira

Eng.º Joari Paulo da Costa

Eng.º Jorge Machado Damázio

Eng.º Jerson Kelman

CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica

São Paulo - SP - Brasil

1986

1. INTRODUÇÃO

Na operação de um sistema de reservatórios para a produção de energia elétrica, é de interesse dispor-se da previsão das afluências semanais incrementais a cada reservatório [1]. Quando os reservatórios do sistema são operados por diferentes empresas, faz-se necessário checar a compatibilidade entre as previsões feitas por cada empresa para os diversos locais de interesse. Estas previsões são obtidas usualmente pelo uso de modelos chuva-vazão ou modelos de séries temporais especialmente desenvolvidos para cada local.

Como estas previsões podem ser efetuadas sem a manipulação de informações de locais vizinhos, o órgão coordenador para a operação do sistema necessita de um mecanismo que detete previsões obtidas em cada local que não são compatíveis entre si. Neste trabalho, propõe-se usar a região de confiança obtida por um modelo estocástico multivariado como um mecanismo de detecção. Este modelo deve ser de estrutura simples por ter que considerar um número grande de medidas (afluências a um conjunto de locais), embora não disponha de algumas medidas que possam ser disponíveis em certas empresas (precipitação, por exemplo). O uso da região de confiança ao invés dos intervalos de confiança obtidos para cada local deve-se ao fato de que um conjunto de previsões para cada local pode parecer provável sob a ótica de cada distribuição univariada, enquanto que na distribuição multivariada corresponderiam a um ponto de "cauda", podendo neste caso ser consideradas suspeitas. A modelagem multivariada das afluências podem ainda ter a vantagem de produzir previsões mais precisas do que as previsões obtidas a partir do uso de modelos univariados do mesmo tipo para cada local. No entanto, modelos univariados são geralmente identificados e ajustados para cada caso, mesmo sendo do tipo séries temporais. Não é óbvio qual das alternativas produz melhores resultados e a questão deve ser examinada caso a caso.

O modelo multivariado autoregressivo é apresentado na representação em espaço de estados, que possibilita o uso do Filtro de Kalman para a estimação dos parâmetros do modelo. Este algoritmo recursivo é indicado por possibilitar a atualização das estimativas dos parâmetros a cada nova medida, além de permitir a consideração da variação temporal dos parâmetros devido ao comportamento sazonal das afluências. A escolha da ordem do modelo é baseada em índices de desempenho que levam em conta os erros de previsão obtidos pela metodologia quando aplicada a série histórica. Apresenta-se um exemplo de aplicação para alguns postos fluviométricos do Rio Iguaçu. Faz-se também uma comparação entre a formulação multivariada e modelos univariados para cada posto.

2. MODELO ESTOCÁSTICO DE AFLUÊNCIAS

Seja z_t um vetor de dimensão n de variáveis normais padronizadas, e v_t um vetor de dimensão n de ruídos normais no instante t tal que

$$E(v_t) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Cov}(v_t) = R \quad (2)$$

$$E(v_t v_s') = 0, \quad t \neq s \quad (3)$$

onde $E(\cdot)$ denota a expectância e $\text{Cov}(\cdot)$ denota a covariância.

O modelo autoregressivo multivariado de ordem p (MAMP) é definido como

$$z_t = A_1 z_{t-1} + \dots + A_p z_{t-p} + v_t, \quad (4)$$

onde A_1, \dots, A_p são matrizes $n \times n$ de parâmetros.

É sabido que séries univariadas providas de um MAMP seguem um modelo ARMA[2]. Como as metodologias de previsão univariada baseadas em modelos de séries temporais em geral seguem modelos ARMA de baixa ordem, a família MAMP pode ser considerada adequada para a aplicação em vista. Cabe notar que o número de parâmetros do MAMP é $n \cdot n \cdot p$ (p matrizes A_1, \dots, A_p) mais $n(n+1)/2$ (a matriz simétrica R).

Uma alternativa à estimativa de momentos [3] ou à estimativa de máxima verossimilhança [4] dos parâmetros do MAMP, que podem apresentar problemas quando se dispõe de registros curtos de afluições históricas é o algoritmo de Kalman.

2.1 Formulação do MAMP em Espaço de Estado

Definindo-se o estado x_t como o vetor de dimensão $p \cdot n$ de parâmetros do MAMP

$$x_t = [a_{11}^1 \dots a_{nn}^1 \ a_{11}^2 \dots a_{nn}^2 \ \dots \ a_{11}^p \dots a_{nn}^p] \quad (5)$$

onde

$$A_k = \{a_{ij}^k\}, \quad j=1, \dots, n, \quad i=1, \dots, n, \quad ,$$

uma formulação em espaço de estados de (4) é dada por

$$x_t = x_{t-1} + w_t \quad (6)$$

$$z_t = H_t x_t + v_t \quad (7)$$

onde w_t é um vetor de dimensão $p \cdot n$ de ruídos normais do sistema tal que

$$E(w_t) = 0 \quad (8)$$

$$\text{Cov}(w_t) = Q \quad (9)$$

$$E(w_t w_s') = 0, \quad s \neq t \quad (10)$$

$$E(w_t v_s') = 0, \quad \forall s, t \quad (11)$$

e onde H_t é uma matriz $n \times n \cdot n \cdot p$ definida como

$$H_t = [H_t^1 \ H_t^2 \ \dots \ H_t^p] \quad (12)$$

onde H_t^i é uma matriz $n \times n \cdot n$ dada por

$$H_t^i = \begin{bmatrix} z_{t-i}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{t-i}' & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & z_{t-i}' \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde 0 é vetor de dimensão n composto de zeros.

A equação (6) representa um "passeio aleatório" para os parâmetros do MAMP para levar em conta a variação temporal. A equação (7) é apenas outra forma de apresentar a equação (4).

Para exemplificar, tornando $p=2$ e $n=2$, tem-se que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

e o estado é constituído então por

$$x_t [a_{11}^1 \ a_{12}^1 \ a_{21}^1 \ a_{22}^1 \ a_{11}^2 \ a_{12}^2 \ a_{21}^2 \ a_{22}^2]$$

e a matriz H_t é dada por

$$H_t = \begin{bmatrix} z_{t-1}^{(1)} & z_{t-1}^{(2)} & 0 & 0 & z_{t-2}^{(1)} & z_{t-2}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{t-1}^{(1)} & z_{t-1}^{(2)} & 0 & 0 & z_{t-2}^{(1)} & z_{t-2}^{(2)} \end{bmatrix}$$

2.2 O Filtro de Kalman

O algoritmo do Filtro de Kalman é um conjunto de equações que permitem que uma estimativa seja atualizada recursivamente uma vez que uma nova observação torna-se disponível.

As equações de previsão (14) - (17) abaixo nos dão a previsão ótima $\hat{x}(t|t-1)$ de x_t e a previsão ótima $\hat{z}(t|t-1)$ de z_t dadas todas as informações disponíveis até o instante $t-1$, além das incertezas associadas a estas previsões:

$$\hat{x}(t|t-1) = E(x_t | z_1, z_2, \dots, z_{t-1}) = \hat{x}(t-1|t-1) \quad (14)$$

$$P(t|t-1) = \text{Cov}(x_t - \hat{x}(t|t-1) | z_1, z_2, \dots, z_{t-1}) = P(t-1|t-1) + Q \quad (15)$$

$$\hat{z}(t|t-1) = H_t \hat{x}(t|t-1) \quad (16)$$

$$Z(t|t-1) = \text{Cov}(z_t - \hat{z}(t|t-1) | z_1, z_2, \dots, z_{t-1}) = H_t P(t|t-1) H_t' + R \quad (17)$$

A cada nova observação, define-se um vetor de dimensão n de inovações

$$u_t = z_t - H_t \hat{x}(t|t-1) \quad (18)$$

As equações de atualização (19) - (21) abaixo incorporam a observação z_t na estimativa $\hat{x}(t|t)$ de x_t :

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K_t u_t \quad (19)$$

onde

$$K_t = P(t|t-1) H_t' Z(t|t-1)^{-1} \quad (20)$$

é o ganho de Kalman, e a incerteza de $\hat{x}(t|t)$ é dada por

$$P(t|t) = \text{Cov}(x_t - \hat{x}(t|t) | z_1, \dots, z_t) = (I - K_t H_t) P(t|t-1) \quad (21)$$

Estas estimativas são condicionadas aos valores iniciais $x_0, P(0|0), Q_0$ e R_0 . No caso das matrizes Q e R de covariâncias dos ruídos serem desconhecidas, O'Connell [5] deduz equações recursivas para estimar Q_t e R_t que são atualizadas a cada nova medida como:

$$R_t = ((t-1) R_{t-1} + (u_t u_t' - H_t P(t|t-1) H_t')) / t, \quad (22)$$

$$Q_t = ((t-1) Q_{t-1} + (K_t u_t u_t' K_t' + P(t|t) - P(t-1|t-1))) / t \quad (23)$$

aonde agora o ganho de Kalman é dado por

$$K_t = P(t|t-1) H_t' (H_t P(t|t-1) H_t' + R_t)^{-1} \quad (24)$$

A matriz $Z(t|t-1)$ de covariância dos erros de previsão de medida pode ser então utilizada para construir a cada

instante $t-1$ uma região de confiança multivariada para a previsão $\hat{z}(t|t-1)$.

3. AJUSTE DO MODELO - CASO EXEMPLO

Selecionou-se medidas semanais de vazões incrementais afluente a três postos fluviométricos no Rio Iguaçu, sendo dois postos associados a reservatórios de usinas hidroelétricas (veja tabela 3.1). De modo a se obter medidas normais, inicialmente aplicou-se uma transformação logarítmica, resultando um vetor y_t de dimensão 3, $t=1, \dots, 1040$ (vinte anos de dados concomitantes). As médias e desvios padrão semanais de cada posto foram estimadas a partir dos 18 primeiros anos de dados, e seus comportamentos periódicos foram representados por funções de Fourier ajustadas.

Obteve-se em seguida um vetor z_t padronizado com componentes

$$z_t(i) = (y_t(i) - \mu_t(i)) / \sigma_t(i) \quad (25)$$

onde $\mu_t(i)$, $\sigma_t(i)$ são as funções de Fourier para as médias e desvios padrão semanais para os postos $i=1,2,3$. Para a identificação correta da estrutura de dependência de z_t é importante remover toda periodicidade na média [6]. Usou-se o mesmo número de harmônicos relevantes para a remoção de periodicidade tanto da média quanto do desvio padrão.

A tabela 3.2 mostra que as séries históricas de z_t apresentam uma alta dependência espacial, o que justifica a tentativa de usar uma modelagem multivariada.

3.1 Modelo MAMP

O coeficiente de autocorrelação de ordem um para os três postos não apresentam um comportamento periódico, como mostram as figuras 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3. Considerou-se então que os parâmetros do MAMP são invariantes no tempo, e tomou-se $Q=0$.

O algoritmo do Filtro de Kalman foi inicialmente aplicado aos vinte últimos anos de dados para $p=1$ e $p=2$, escolhendo-se o modelo de menor erro médio quadrático de previsão das afluências incrementais nos dois últimos anos. A previsão \hat{q}_t no instante t no posto i é dada por

$$\hat{q}_t(i) = \exp(\hat{y}_t(i) + 1/2 \sigma_y^2(i)) \quad , \quad (26)$$

onde

$$\hat{y}_t(i) = \hat{z}_t(i) \sigma_t(i) + \mu_t(i) \quad , \quad (27)$$

$$\sigma_y^2(i) = \sigma_t^2(i) \sigma_z^2(i) \quad , \quad (28)$$

sendo $\sigma^2(i)$ é o i -ésimo elemento de diagonal de $Z(t|t-1)^Z$ e $\hat{z}_t(i)$ é o i -ésimo componente de $\hat{z}(t|t-1)$. A tabela 3.1.1 apresenta os erros médios quadráticos de previsão para $p=1$ e $p=2$. O modelo MAM_1 é a melhor escolha, e seus parâmetros e incertezas associadas estimados na semana 1040 estão apresentados na tabela 3.1.2. As figuras 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6 mostram as funções de autocorrelação das inovações para os postos 1, 2 e 3 respectivamente, assim como os intervalos de confiança de 95%. As figuras 3.1.7, 3.1.8 e 3.1.9 mostram as afluências medidas e previstas nos postos 1, 2 e 3 assim como os respectivos intervalos de confiança de 68%.

3.2 Modelo ARMA Univariado

Para se comparar o desempenho do modelo multivariado com as previsões obtidas de modelos univariados, modelos ARMA para cada posto foram ajustados utilizando o método de máxima verossimilhança [7] para estimação dos parâmetros com os primeiros 18 anos de dados. A ordem do modelo em cada posto foi escolhida pelo mesmo critério anteriormente adotado.

O modelo ARMA (p,q) pode ser definido por

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \dots - \phi_p z_{t-p} = a_t^{-\theta_1} a_{t-1}^{-\theta_2} \dots a_{t-q}^{-\theta_q} \quad (29)$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_p são parâmetros autoregressivos $\theta_1, \dots, \theta_q$ são parâmetros média móvel, e a_t um ruído independente de distribuição normal de média nula e variância σ_a^2 . O índice i correspondente ao posto foi omitido para simplificar a notação.

A tabela 3.2.1 apresenta os parâmetros do modelo ARMA (p,q) de melhor ajuste em cada posto.

A previsão z_t para o instante t neste caso é dada por

$$\hat{z}_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} - \theta_1 \hat{a}_{t-1} - \dots - \theta_q \hat{a}_{t-q} \quad (30)$$

onde

$$\hat{a}_{t-j} = z_{t-j} - \hat{z}_{t-j}, \quad j=1, \dots, q \quad (31)$$

A equação (26) neste caso corresponde a

$$\hat{q}_t = \exp(\hat{y}_t + 1/2 \sigma_y^2) \quad (32)$$

onde

$$\hat{y}_t = \hat{z}_t \sigma_t + \mu_t \quad (33)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_t^2 \sigma_a^2 \quad (34)$$

O índice i também foi omitido das equações acima. A tabela 3.2.2 apresenta o erro médio quadrático da previsão para cada posto para este caso. As figuras 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 mostram as funções de autocorrelação das inovações para os postos 1, 2 e 3 respectivamente, assim como os intervalos de confiança de 95%. As figuras 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6 apresentam as vazões incrementais medidas e previstas para cada posto assim como os intervalos de confiança de 68%.

3.3 Comparação entre Abordagens Multivariada e Univariada

O modelo de previsão mais elementar consiste em tomar $\hat{z}_t = z_{t-1}$, que é um limite inferior para a experiência de previsão. Com este modelo, as inovações obtidas para os mesmos dados dos três postos não são ruídos brancos, e o erro médio quadrático de previsão em cada posto é apresentado na tabela 3.3.1. As tabelas 3.1.1 e 3.2.1 mostram que as abordagens multivariada e univariada tem desempenho similar no período de previsão, representando um ganho de 10% a 20% em relação ao modelo $\hat{z}_t = z_{t-1}$. As funções de autocorrelação das inovações para ambas as abordagens têm padrões semelhantes, e as previsões apresentadas nas figuras 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9 e 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6 demonstram resultados satisfatórios para ambas.

A vantagem da abordagem multivariada provém da região de confiança que pode ser construída a partir da matriz $Z(t|t-1)$ de covariância dos erros de previsão, da seguinte forma:

$$(z_t - \hat{z}(t|t-1))' Z(t|t-1)^{-1} (z_t - \hat{z}(t|t-1)) \leq \chi^2(n, \alpha) \quad (35)$$

A figura 3.3.1 compara a região de confiança de 95% para as afluições na semana 1040 dos postos 2 e 3 com os respectivos intervalos de confiança obtidos usando unicamente os elementos diagonais da matriz $Z(t|t-1)$. Na figura, o ponto A corresponde a uma previsão suspeita, embora isto não possa ser detetado pela abordagem univariada. Por outro lado, os pontos B, C ou D seriam considerados previsões inaceitáveis pelos intervalos de confiança e pela abordagem multivariada seriam aceitáveis.

4. CONCLUSÕES

A operação a curto prazo de um sistema de usinas hidroelétricas é baseada em afluições incrementais previstas a cada reservatório. Estas previsões são em geral feitas com o uso de modelos univariados. No entanto, numa bacia as afluições são não só serialmente mas também espacialmente dependentes, e pelo uso de um modelo multivariado pode-se obter um conjunto de previsões assim como a respectiva re

gião de confiança que leva em conta esses efeitos. Esta regressão de confiança também é útil para validar previsões obtidas de modelos específicos para cada local.

Neste trabalho apresentou-se um modelo autoregressivo multivariado formulado em espaço de estados, de modo que um algoritmo de Filtro de Kalman pode ser usado para recursivamente estimar os parâmetros do modelo a produzir previsões. Mostrou-se que em um caso exemplo com três postos com vinte anos de vazões semanais, o Filtro de Kalman estimou corretamente os parâmetros do modelo e produziu previsões um passo a frente para os últimos 2 anos com um desempenho equivalente as previsões obtidas pelo modelo ARMA melhor ajustado a cada posto.

01.10.85

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Eng. Paulo R. Holanda Sales da ELETRÓBRÁS pelas valiosas discussões e pela cessão do programa de estimação de modelos ARMA.

6. REFERÊNCIAS

- (1) Pereira, M.F.P. - Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems. An Overview. IFAC Symposium of Electric Energy Systems - Rio de Janeiro, (1985).
- (2) Ledolter, J. - The Analysis of Multivariate Times Series Applied to Problems in Hydrology. Journal of Hydrology, 36, 327-352 (1978).
- (3) Salas, J.D.; Delleur, J.W.; Yevjevich, V.; Lane, W.L. - Applied Modelling of Hydrologic Times Series - Water Resources Publications, USA (1980).
- (4) Salas, J.D.; Pegram, G.G.S. - A Seasonal Multivariate Multilag Autoregressive Model - in Modelling Hydrologic Processes, Water Resources Publications, USA (1979).
- (5) O'Connell, P.E. - Real Time Hydrologic Forecasting and Control - Proceedings of 1st International Workshop, Institute of Hydrology (1980)
- (6) Yevjevich, V.; Obeysekera, J.T.B. - Effects of Incorrectly Removed Periodicity in Parameters on Stochastic Dependence - Water Resources Research, 21(5), 685-690 (1985).
- (7) Hipel, K.W.; McLeod, I.A.; Lennox, W.C. - Advances in Box-Jenkins Modelling, 1. Model Construction - Water Resources Research, 13 (3), 567-568 (1977).

TABELA 3.1 - 1 - Características dos Postos

Posto	Nome	Área de Drenagem (km ²)	Reservatório
1	P. Amazonas	3.662	-
2	U. Vitória	24.211	Foz da Areia
3	S. Osorio	45.824	Salto Osorio

TABELA 3.2 - 1 - Correlações Cruzadas Amostrais de z_t entre Postos

Posto	1	2	3
1	1.	.808	.700
2		.1	.831
3			.1

TABELA 3.1.1 - 1 - Erro Médio Quadrático de Previsão-Modelo MAM_p

Posto	MAM_1	MAM_2
1	30.	29.
2	133.	156.
3	318.	321.
1+2+3	423.	437.

TABELA 3.1.2 - 1 - Parâmetros e Incertezas Associados do Modelo MAM_1

	Parâmetro	Desvio-Padrão
a_{11}	.779	.033
a_{12}	-.179	.045
a_{13}	.194	.037
a_{21}	.262	.032
a_{22}	.472	.043
a_{23}	.171	.035
a_{31}	.060	.033
a_{32}	.074	.045
a_{33}	.694	.036

TABELA 3.2.1 - 1- Parâmetros do Modelo ARMA Ajustados para Cada Posto

Posto	Ordem do Modelo	Parâmetros AR	Parâmetros MA
1	(2,1)	.285 , .312	.624
2	(1,1)	.764	.226
3	(1,0)	.797	-

TABELA 3.2.2 - 1

Posto Erro Médio Quadrático de Previsão - Modelo ARMA

1	29.
2	121.
3	313.
1+2+3	399.

TABELA 3.3.1 - 1

Posto Erro Médio Quadrático de Previsão - Modelo $\hat{z}_t = z_{t-1}$

1	40.
2	144.
3	380.
1+2+3	480.

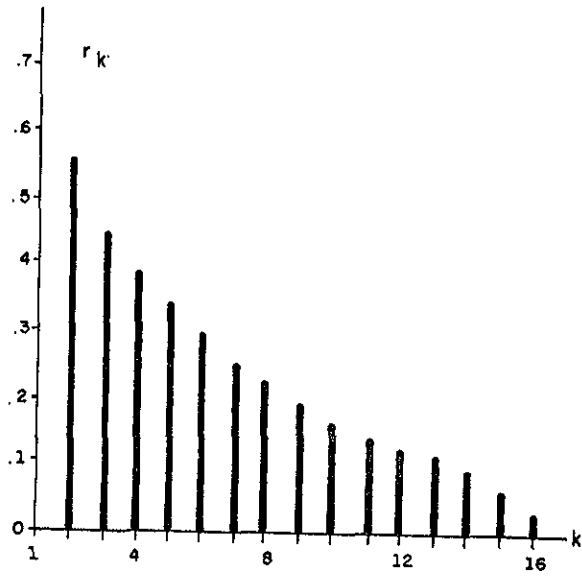


FIGURA 3.1 - 1 - Função de autocorrelação Ordem 1 - P. Amazonas

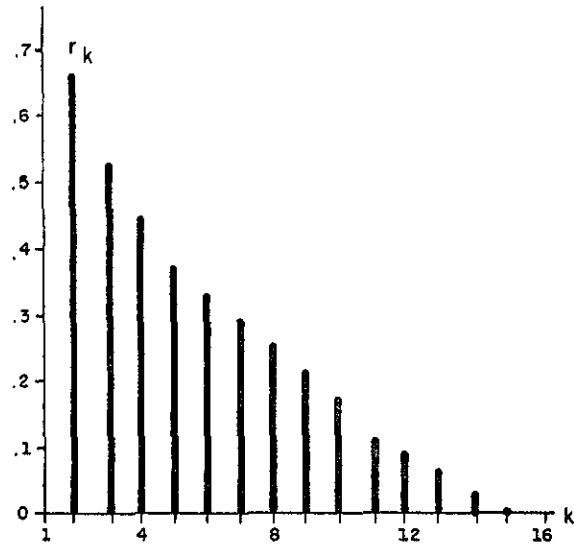


FIGURA 3.1 - 2 - Função de Autocorrelação Ordem 1 - U. Vitória

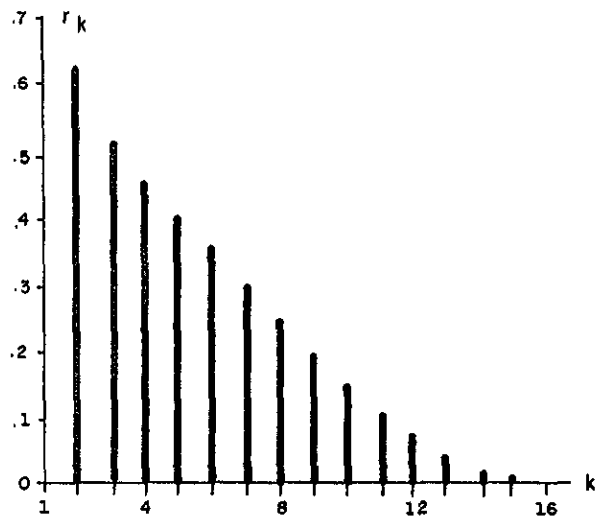


FIGURA 3.1 - 3 - Função de Autocorrelação Ordem 1 - S.Osório

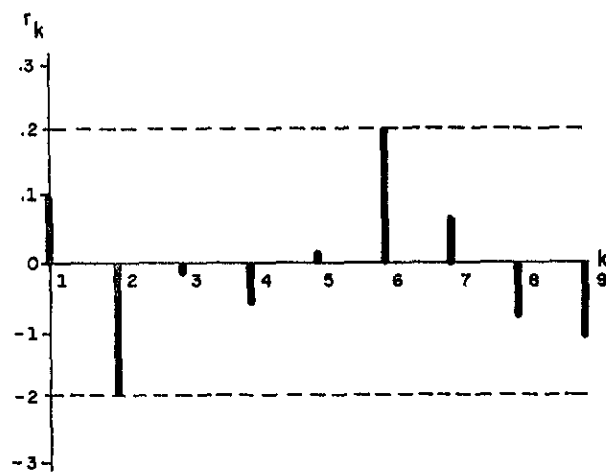


FIGURA 3.1 - 4 - Função de Autocorrelação das Inovações -
Modelo MAM_1 - P. Amazonas

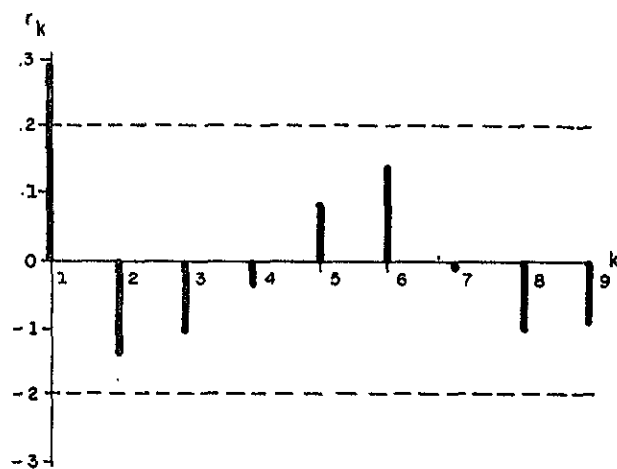


FIGURA 3.1 - 5 - Função de Autocorrelação das Inovações -
Modelo MAM_1 - U. Vitória

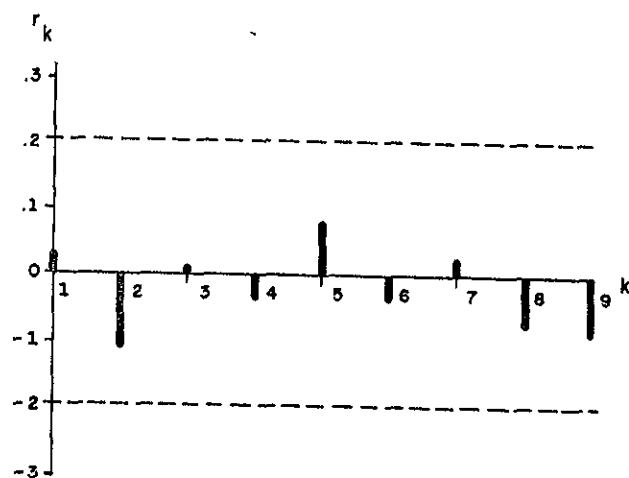


FIGURA 3.1 - 6 - Função de Autocorrelação das Inovações -
Modelo MAM_1 - S. Osório

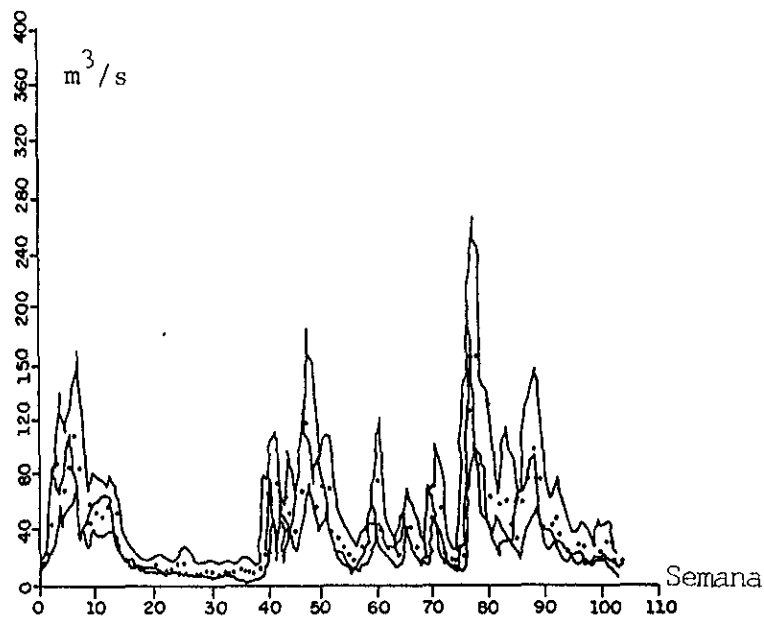


FIGURA 3.1 - 7 - Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalos de Confiança 68% - Modelo MAM_1 P. Amazonas

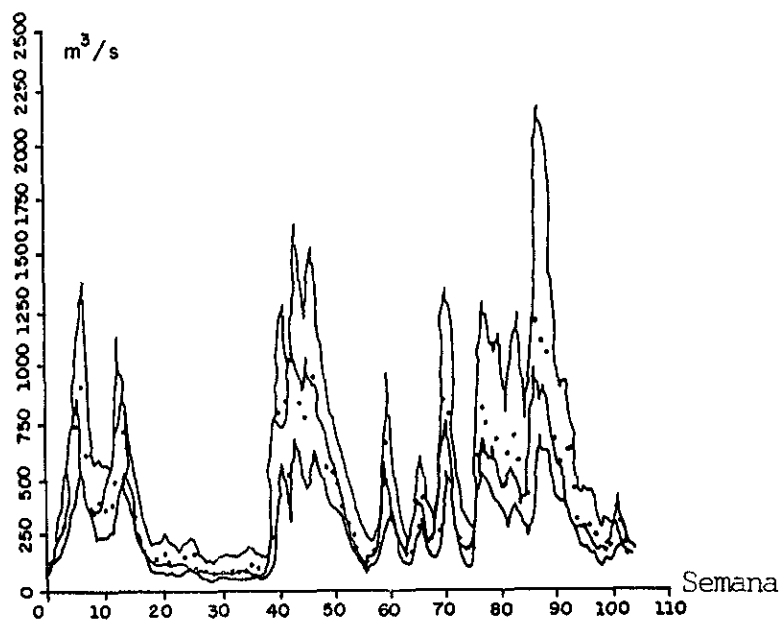


FIGURA 3.1- 8 - Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalos de Confiança 68% - Modelo MAM_1 U. Vitória

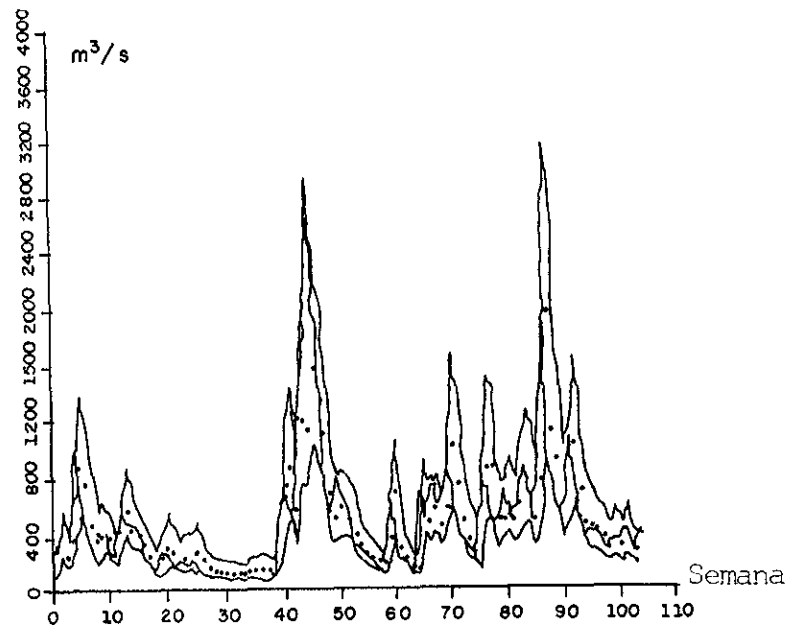


FIGURA 3.1 - 9 - Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalo de Confiança 68% - Modelo MAM_1 S. Osório

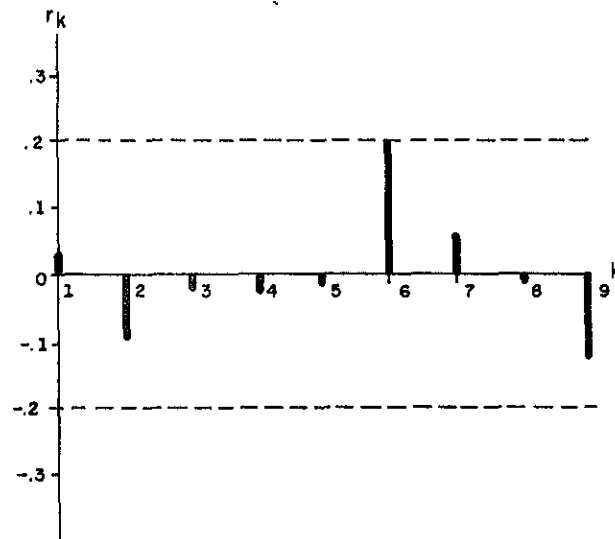


FIGURA 3.2 - 1 - Função de Autocorrelação das Inovações - Modelo ARMA (2,1) - P. Amazonas

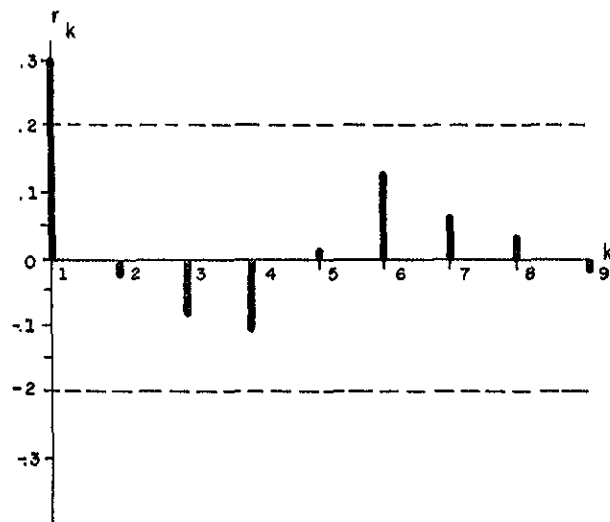


FIGURA 3.2 - 2 - Função de Autocorrelação das Inovações -
Modelo ARMA (1,1) - U. Vitória

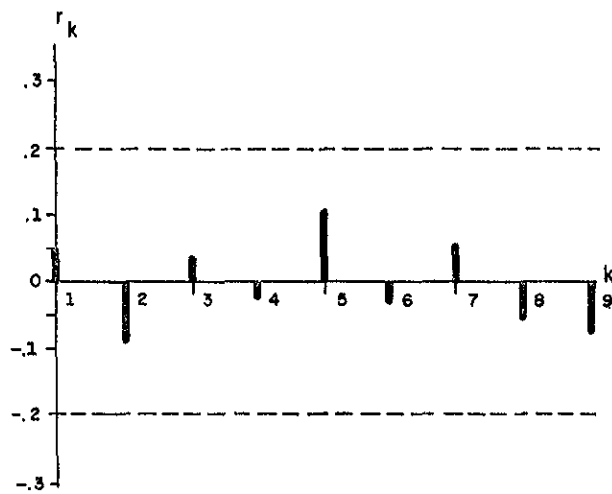


FIGURA 3.2 - 3 - Função de Autocorrelação das Inovações
Modelo ARMA (1,0) - S. Osório

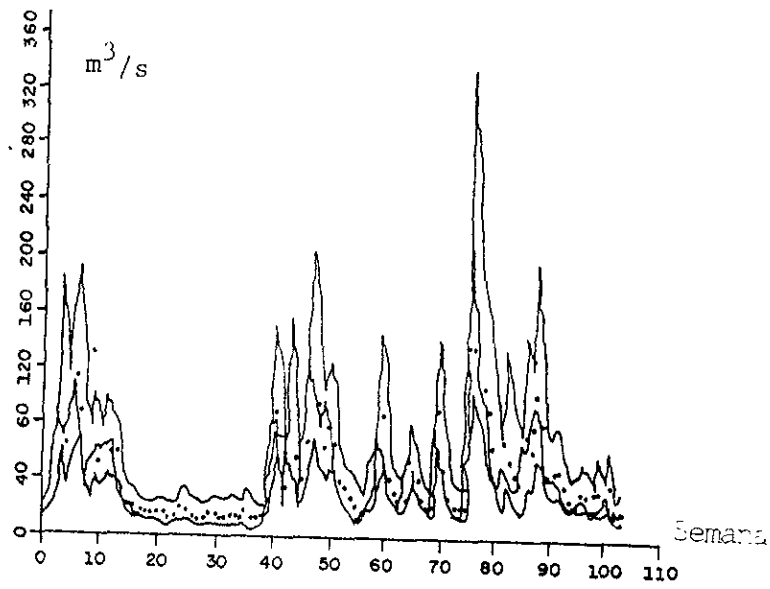


FIGURA 3.2 - 4 - Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalo de Confiança 68% - Modelo ARMA (2,1) - P. Amazonas

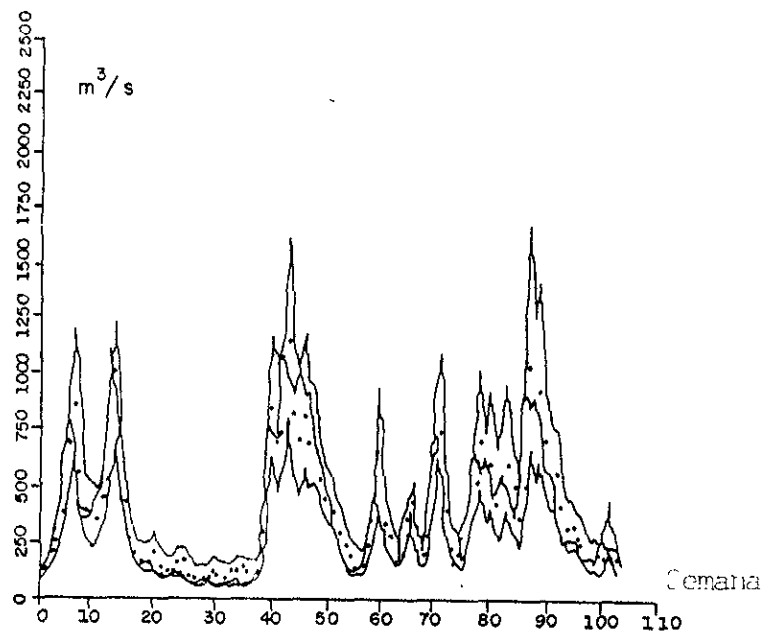


FIGURA 3.2 - 5 - Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalo de Confiança 68% - Modelo ARMA (1,1) - U. Vitória

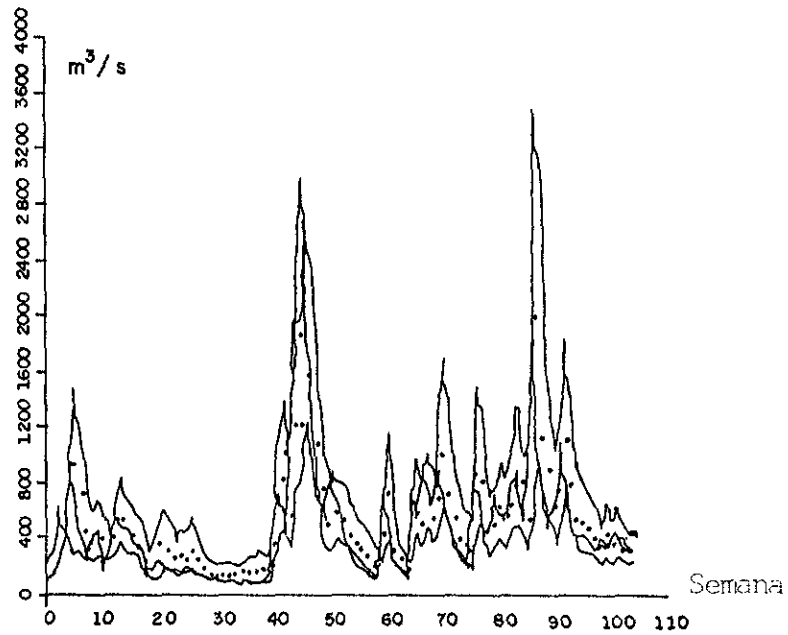


FIGURA 3.2 - 6 -Afluências Medidas (-), Previstas (.) e Intervalo de Confiança 68% - Modelo ARMA (1,0) - S. Osório

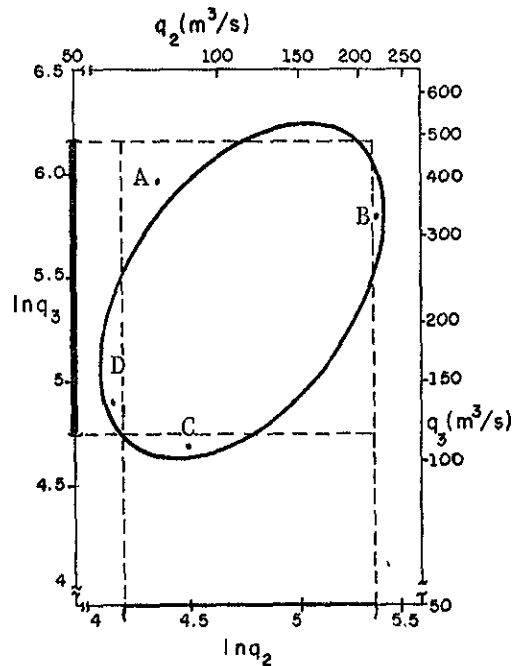


FIGURA 3.3 - 1 - Região de Confiança de 95% e Intervalos de Confiança para U. Vitória (q_2) e S. Osório (q_3)