

VAZÃO GARANTIDA POR UM RESERVATÓRIO

POR

J.M.Damazio¹ e J. Kelman²

RESUMO -- Vazão firme é a máxima vazão que um reservatório consegue regularizar, caso se repitam no futuro as afluências registradas no passado. Durante o horizonte de planejamento ocorrerá uma sequência de vazões distinta do histórico. Para cada possível sequência que seja "sorteada" estará associada uma "vazão firme", ou seja, a máxima vazão defluente de um reservatório varia de sequência para sequência e pode, portanto, ser vista como variável aleatória. A esta variável dá-se o nome de vazão garantida. Neste trabalho são comparados métodos de cálculo da correspondente distribuição de probabilidades. Resultados resumidos em gráficos permitem uma avaliação expedita da capacidade de regularização de um determinado reservatório, para um horizonte de 40 anos.

INTRODUÇÃO

Com frequência grandes reservatórios são construídos sem que se tenha um registro hidrológico suficientemente longo. Consequentemente, é de se esperar que a avaliação da capacidade de regularização seja feita de forma precária. Com o passar dos anos, as informações vão se acumulando, permitindo a reavaliação do efeito de cada reservatório. Uma medida deste efeito é dada pela vazão garantida. No que se segue, métodos para computação de sua distribuição de probabilidade são descritos e comparados.

C PROBLEMA

Seja um reservatório cheio, armazenando um volume útil igual a y . Seja uma sucessão x_1, x_2, \dots, x_h onde x_t é o volume afluente ao reservatório durante o ano t . A equação da continuidade quando aplicada ao reservatório se expressa como:

$$v_{t+1} = v_t + x_t - s \quad ; \quad \text{caso } v_{t+1} < v \quad (1)$$

$$v_{t+1} = v \quad ; \quad \text{caso } v_t + x_t - s > v$$

¹Aluno da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia - COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

²Pesquisador do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPTEL, e Professor Visitante da COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

onde:

v_t é o volume armazenado no início do ano t e
 s é o volume liberado durante o ano.

Existe, naturalmente, a restrição de que v_t seja não negativo. Haverá um valor máximo de s , s_m tal que para $s > s_m$ exista pelo me nos algum t , $1 < t < h$, tal que $v_t \leq 0$.

Para uma outra sucessão $x_1^i, x_2^i, \dots, x_h^i$ estará associado um di ferente máximo de s , s_m^i . Ou seja, como na situação real as vazões afluentes nos próximos h anos (horizonte de planejamento) não são conhecidas, formando pois uma família de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_h , assim também o deflúvio máximo é uma variável aleató ria, S_m . Como é mais usual pensar-se em vazão em vez de volume, se rá estudada a distribuição de probabilidades da variável aleatória, vazão garantida, Q , definida como sendo: $Q = S_m/n$, onde n é o nú mero de segundos do ano. Da definição de Q , conclui-se que $P[Q < q]$ é a probabilidade de existir algum t , $1 < t < h$, tal que $v_t < 0$, dado $v_0 = v$, quando o objetivo é manter uma vazão defluente fixa e igual a q .

As atividades de pesquisa na área tem-se utilizado de 2 ferra mentas: a simulação e a teoria analítica de cadeias de Markov, ini ciada por Moran (1954).

CADEIAS DE MARKOV

A abordagem apresentada a seguir é similar à de Lloyd (1967). Algumas modificações foram necessárias para a obtenção do objetivo específico, qual seja a distribuição de probabilidades da vazão ga rantida.

Afluências independentes

Será conveniente representar o estado de armazenamento V_t por uma variável discreta definida por:

$$\begin{cases} z_t = 1 & ; \text{ se } v_t = 0 \\ z_t = i & ; \text{ se } (i-2) \cdot \Delta V < v_t < (i-1) \cdot \Delta V \\ 1 < i < K & ; \Delta V = v/(K-2) \\ z_t = K & ; \text{ se } v_t = v \end{cases} \quad (2)$$

Se $X_1, X_2, X_3, \dots, X_h$, forem independentes e identicamente dis tribuídos, então para uma vazão defluente q temos:

$$(j-1) \cdot \Delta V$$

$$\int \left[\int f_{V_{t+1}|V_t}(v_{t+1}|v_t; q) \partial v_{t+1} \right] \cdot f_{V_t}(v_t; q) \partial v_t$$

$$(j-2) \cdot \Delta V$$

$$P[Z_{t+1}=i|Z_t=j;q] = \frac{(j-1) \cdot \Delta V}{(j-1) \cdot \Delta V} \quad (3)$$

$$\int f_{V_t}(v_t; q) \partial v_t$$

$$(j-2) \cdot \Delta V$$

$$1 < i < K$$

$$1 < j < K$$

sendo

$f_{V_{t+1}|V_t}(v_{t+1}|v_t)$ a densidade de probabilidade de V_{t+1} , conhe cido v_t e $f_{V_t}(v_t; q)$ a densidade de probabilidade de V_t

Pode-se aproximar a equação (3) por:

$$(i-1) \cdot \Delta V$$

$$P[Z_{t+1} = i | Z_t = j; q] = \int f_{V_{t+1}|V_t}(v_{t+1}|y_t; q) \partial v_{t+1} \quad (4)$$

$$(i-2) \cdot \Delta V$$

$$1 < i < K$$

$$1 < j < K$$

sendo

$$y_t = \frac{1}{2}((j-1) \cdot \Delta V + (j-2) \cdot \Delta V) \quad (5)$$

Das equações (1) e (4), para $s=n \cdot q$, tem-se:

$$(i-1) \cdot \Delta V - y_t + nq$$

$$P[Z_{t+1} = i | Z_t = j; q] = \int f_X(x) dx \quad (6)$$

$$(i-2) \cdot \Delta V - y_t + nq$$

$$1 < i < K$$

$$1 < j < K$$

onde:

$f_X(x)$ é a densidade de probabilidade de X, volume anual afluente.

As transições que compreendem os estados limites 1 e K, têm suas probabilidades calculadas por (6), modificando os limites da integral, como por exemplo:

$$P[Z_{t+1} = i | Z_t = 1; q] = \int_{(i-2) \cdot \Delta V + nq}^{(i-1) \cdot \Delta V + nq} f_X(x) dx \quad 1 < i < K \quad (7)$$

$$P[Z_{t+1} = i | Z_t = j; q] = \int_{(K-2) \cdot \Delta V - y_t + nq}^{\infty} f_X(x) dx \quad 0 < j < K \quad (8)$$

Pode-se então definir a matriz estocástica, $A'_q = \{a'_q(i, j)\}$

onde:

$$a'_q(i, j) = P[Z_{t+1} = i | Z_t = j; q] \quad (9)$$

por definição:

$$P[Q < q] = P[(Z_1=1 | Z_0=K; q) U(Z_2=1 | Z_0=K; q) \dots U(Z_h=1 | Z_0=K; q)] \quad (10)$$

Se modificarmos o processo fazendo $P[Z_t = 1 | Z_{t-1} = 1] = 1$, ao substituir a primeira coluna de A'_q pelo vetor (1, 0, 0...), criando uma nova matriz estocástica A_q , então:

$$P[Q < q] = P[Z_h = 1 | Z_0 = K, q] = a_q^h(1, K) \quad (11)$$

onde:

$a_q^h(1, K)$ é a entrada (1, K) na potência h da matriz A_q .

Um artifício análogo, isto é, o uso de estado absorvente, foi utilizado por Gomide (1975) na determinação da distribuição de probabilidade do volume necessário para regularizar uma vazão pré-fixada.

Afluências correlacionadas

A extensão para o caso de afluências correlacionadas é feita criando-se um processo discreto $\{W_t\}$ relacionado com $\{X_t\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} W_t = -(K-1) & , \text{ se } x_t < s - (K-1.5) \cdot \Delta V \\ W_t = i & , \text{ se } s + (2i-1) \cdot \Delta V / 2 < x_t < s + (2i+1) \cdot \Delta V / 2 \\ W_t = (K-1) & , \text{ se } x_t > s + (K-1.5) \cdot \Delta V \end{cases} \quad (12)$$

Para o processo $\{W_t\}$ pode-se definir uma matriz

$$F = \{f(i, j)\}, \text{ dim}(m \times m)$$

onde:

$$f(i, j) = P[W_{t+1} = i | W_t = j]$$

F é dada por:

$$F = \rho I + (1-\rho) \bar{p} 1^t \quad (13)$$

onde:

ρ : é o coeficiente de correlação lag-um

\bar{p} : é o vetor de probabilidade marginal de W_t

$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ sendo os valores de p_i dado por integrais $f_X(x) dx$ entre os limites dados por (12)

I : matriz identidade, dim(m x m)

1^t : vetor (1, 1, ..., 1), dim(1 x m)

$$m = 2(K-1) + 1$$

O estado do sistema é caracterizado pelo par de variáveis aleatórias discretas (Z_t, W_t) . Para este conjunto de estados existe a matriz de transição A'_q de dimensão $(2K^2 - K)$ definidas pelas relações:

$$\begin{aligned} P[(Z_{t+1} = l+i, W_{t+1} = j) | (Z_t = l, W_t = i), q] &= \\ &= P[W_{t+1} = j | W_t = i] = f(j, i) \end{aligned} \quad (14)$$

$$P[(Z_{t+1} \neq l+i, W_{t+1} = j) | (Z_t = l, W_t = i), q] = 0 \quad (15)$$

Analogamente ao caso independente, será criada uma nova matriz A_q englobando todos os estados vazios ($Z_t = 1, W_t = j$) num só estado ($Z_t = 1$) absorvente. A matriz de transição A_q terá então dimensão $(2K^2 - 3K + 2)$. O valor de $F_Q(q)$ será dado por:

$$F_Q(q) = \sum_i P[Z_h = 1 | (Z_0 = K, W_0 = i), q] \cdot p_i \quad (16)$$

sendo os valores $P[Z_h = 1 | (Z_0 = K, W_0 = i)]$ obtidos da potência h da matriz A_q .

Potência de matrizes

Existem pelo menos duas maneiras de se obter potências de matrizes: a multiplicação e a decomposição.

Por multiplicação se entende aqui a utilização da propriedade $A^h = A^{h-g} \cdot A^g$.

Assim para se obter A^{40} são necessárias seis multiplicações de matrizes ($A \cdot A = A^2, A^2 \cdot A^2 = A^4, A^4 \cdot A^4 = A^8, A^8 \cdot A^8 = A^{16}, A^{16} \cdot A^{16} = A^{32}, A^{32} \cdot A^8 = A^{40}$).

A decomposição se baseia na seguinte propriedade:

Se $A_{(d \times d)}$ é diagonalizável então $A_{(d \times d)}$ pode ser escrita como $A = S T S^{-1}$ e $A^h = S T^h S^{-1}$

sendo:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{dd} \end{bmatrix}, T^h = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^h & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{dd}^h \end{bmatrix}$$

λ_{ii} é um autovalor de A

$$S = [s_1, \dots, s_d]$$

$s_i = \vec{e}$ o autovetor de A correspondente a λ_{ii}

A determinação de A^h por decomposição segue o seguinte esquema:

- i) Encontrar os d distintos autovalores de A . Caso não existam d autovalores distintos provocar uma perturbação em A ;
- ii) Encontrar os d autovetores de A e formar S ;
- iii) Inverter S ;
- iv) Determinar A^h por $A^h = S T^h S^{-1}$

SIMULAÇÃO

A simulação consiste na síntese de um grande número de sequências $\{x_1, \dots, x_h\}$ usando um processo gerador que reproduza o que se considera as mais importantes características das sequências reais.

Um modelo simples de geração é dado por:

$$x_{t+1} = \mu + \rho (x_t - \mu) + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \cdot e_{t+1} \quad (17)$$

onde:

$$E(X_t) = \mu, \text{ var}(X_t) = \sigma^2; \text{ cov}(X_t, X_{t+1}) = \rho \sigma^2,$$

$$E(e_{t+1}) = 0 \text{ e } \text{var}(e_{t+1}) = 1$$

Aplicando-se a equação da continuidade (1) com as condições $v_0 = v$ e $s = nq$, obtém-se para cada série sintética uma correspondente sequência $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$.

A distribuição de probabilidade de Q é obtida de:

$$P[Q < q] \cong \frac{\ell_q}{u} \quad (18)$$

onde:

ℓ_q : Número de séries sintéticas onde existe algum t , tal que $v_t < 0$; para $s = nq$

u : Número de séries geradas

Para se obter a distribuição de probabilidade de Q é necessário aplicar o esquema acima para vários valores de Q , $q = q_1, q = q_2, \dots$. Existem algumas propriedades que podem ser aproveitadas no sentido de diminuir o esforço computacional. Por exemplo, se na aplicação da equação (1), para um particular q_j , ocorre que $v_t^* < 0$ na i -ésima série sintética, então não é necessário calcular todos os v_t restantes ($t^* < t < h$). Mais ainda, a simulação nesta série para qualquer $q > q_j$ certamente encontrará algum

$t, 1 < t < h$, para o qual $v_t < 0$.

ESTUDO COMPARATIVO DOS MÉTODOS

Nesta seção é feita uma comparação das técnicas até aqui apresentadas, utilizando tempo de processamento como critério diferenciador. É utilizada a distribuição normal, para a afluência ao reservatório.

O resultado das Cadeias de Markov é aproximado devido à necessidade de se discretizar o estado de armazenamento. No caso de $\rho \neq 0$, isto ocorre também com a afluência. Para se obter uma dada precisão, deve-se tornar as malhas de discretização cada vez mais finas até que o resultado final não seja sensível a um maior detalhamento.

Os resultados na simulação são baseados em observações da variável aleatória L_q/u que tem momentos dados por:

$$E [L_q/u] = p = P [Q < q] \quad (19)$$

$$\text{var} [L_q/u] = \frac{p(1-p)}{u} = \epsilon^2 \quad (20)$$

Logo, ϵ , o erro esperado da equação (18), é inversamente proporcional a raiz quadrada de u .

Foram estudados dois casos no computador Burroughs B6700

Primeiro caso: Independente

Horizonte : $h = 40$ anos

Volume de Reservatório : $t_e = 120$ dias (tempo de enchimento)

Média Anual : $\mu = 1m^3/s$

Coefficiente de Variação: $cv = 0.3$

Valores de q : $[0.1, 0.2, \dots, 1.0]$.

"Tabela 1. Comparação das Técnicas. Caso Independente"

M É T O D O	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	TEMPO DE PROCESSAMENTO
Markov Multiplicação	$\Delta p = 0.01$	0:00:09
Markov Decomposição	$\Delta p = 0.01$	0:00:21
Simulação	$u = 1000$	0:02:17

Segundo caso: Dependente

Horizonte : $h = 40$ anos

Volume do Reservatório : $t_e = 120$ dias

Média Anual : $\mu = 1m^3/s$

Coefficiente de Variação : $cv = 0.3$

Coefficiente de autocorrelação : $\rho = 0.3$

Valores de q : $[0.1, 0.2, \dots, 1.0]$

"Tabela 2. Comparação das técnicas. Caso dependente"

M É T O D O	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	TEMPO DE PROCESSAMENTO
Markov Multiplicação	*	0:08:27
Simulação	$n = 1000$	0:02:43

(*) Soluções obtidas para $K = 5$

O exame das tabelas 1 e 2 indica que:

- i) Se as vazões afluentes podem ser consideradas independentes, o uso da teoria de Cadeias de Markov é computacionalmente mais eficiente. E neste caso é preferível a multiplicação direta em vez do método da decomposição.
- ii) O crescimento na dimensão das matrizes de transição devido a inclusão da correlação faz com que, para este caso, a simulação seja o método mais indicado.

APLICAÇÃO

A figura 2 resume as distribuições de probabilidades da vazão garantida para o horizonte de 40 anos, obtidas por simulação com vários valores de tempo de enchimento, coeficiente de variação e coeficiente de autocorrelação. Nesta aplicação a afluência é considerada normalmente distribuída. Sua utilização permite obter de forma expedita uma idéia da distribuição da vazão garantida para um dado reservatório.

Seja, por exemplo, o reservatório de Tucuruí de volume útil $23 \times 10^9 m^3$. Deseja-se obter estimativa do valor esperado da vazão garantida. Deseja-se também calcular a probabilidade de que a vazão garantida seja menor do que 60% da média das vazões afluentes. Isto para um horizonte de planejamento de 40 anos. A série de vazões médias anuais no período de 1949 - 1973 em Tucuruí fornecida por Engevix e ECOTEC (1975) apresenta as seguintes características:

$$\hat{\mu} = 9255m^3/s$$

$$\hat{\sigma} = 2477m^3/s$$

$$\hat{\rho} = 0.22$$

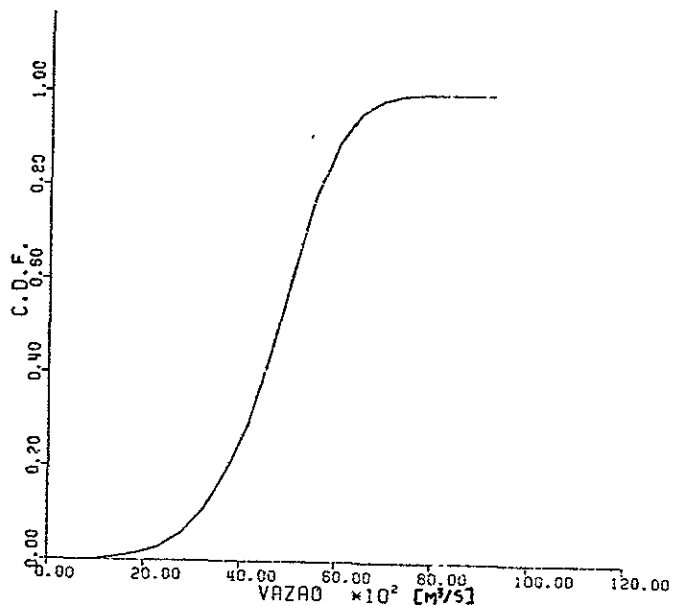
onde:

$$t_e = \frac{2.3 \times 10^{10}}{86400 \times 9255} = 29.4 \text{ dias}$$

$$cv = \hat{\sigma}/\hat{\mu} = 0.27$$

$$q = 0,6 \times 9255 = 5553$$

Os resultados para este problema, obtidos por uma simulação específica para o caso, foram $E(Q) \approx 4688$ e $P(Q < 5553) \approx 0,77$



"Figura 1. Distribuição de probabilidades da vazão garantida pelo reservatório de Tucuruí obtida por simulação, horizonte de 40 anos, afluência normalmente distribuída".

Da figura 2 obtém-se por interpolação:

$$E(Q) \approx 4637 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P(Q < 5553) \approx 0,75$$

As figuras apresentadas permitem que se faça uma análise de sensibilidade do efeito da variação nos parâmetros μ , σ , ρ . Como se sabe, os estimadores $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\rho}$ são variáveis aleatórias de variâncias dadas aproximadamente por:

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{b}$$

$$\sigma^2(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2b}$$

$$\sigma^2(\hat{\rho}) = \frac{(1 - \rho^2)^2}{b}$$

sendo b o número de anos da série histórica.

Na tabela 3 se apresenta a variação percentual em $P(Q < 5553)$ e $E(Q)$ do problema anterior, para uma translação de um desvio padrão em cada parâmetro de per si.

"Tabela 3. Efeito da variação nos parâmetros μ , σ , ρ ".

PARÂMETROS	E(Q)	%	P(Q < 5553)	%
$\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}$	4637	-	0,75	-
$\hat{\mu} + (\hat{\mu}), \hat{\sigma}, \hat{\rho}$	5314	14,5	0,56	25,3
$\hat{\mu}, \hat{\sigma} - (\hat{\sigma}), \hat{\rho}$	5425	16,9	0,50	33,3
$\hat{\mu}; \hat{\sigma}; \hat{\rho} - (\hat{\rho})$	4637	0,0	0,75	0,0

Neste caso, os resultados são sensíveis a variações nos parâmetros μ e σ , tendo flutuações em ρ um efeito desprezível.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, pela concessão de uma bolsa de estudos que lhe permitiu desenvolver este trabalho. Ambos os autores agradecem as discussões estabelecidas com os engenheiros Gerson Couto de Oliveira e Mário Veiga Ferraz Pereira.

REFERÊNCIAS

- ENGEVIX e ECOTEC (1975), Estudos Hidrometeorológicos da Bacia do Rio Tocantins, volume II, Fluviometria, tomo VI, página 185-275.
- GOMIDE, F.L.S. (1975), "Range and Deficit Analysis Using Markov Chains", Hydrology Papers, nº 79.
- LLOYD, E.H. (1967), "Stochastic Reservoir Theory", Advances in Hydrosociences, volume 4, pages 281-339.
- MORAN, P.A.P. (1954), "A Probability Theory of Dams and Storage Systems", Australian Journal Applied Science, volume 5, pages 116-124.

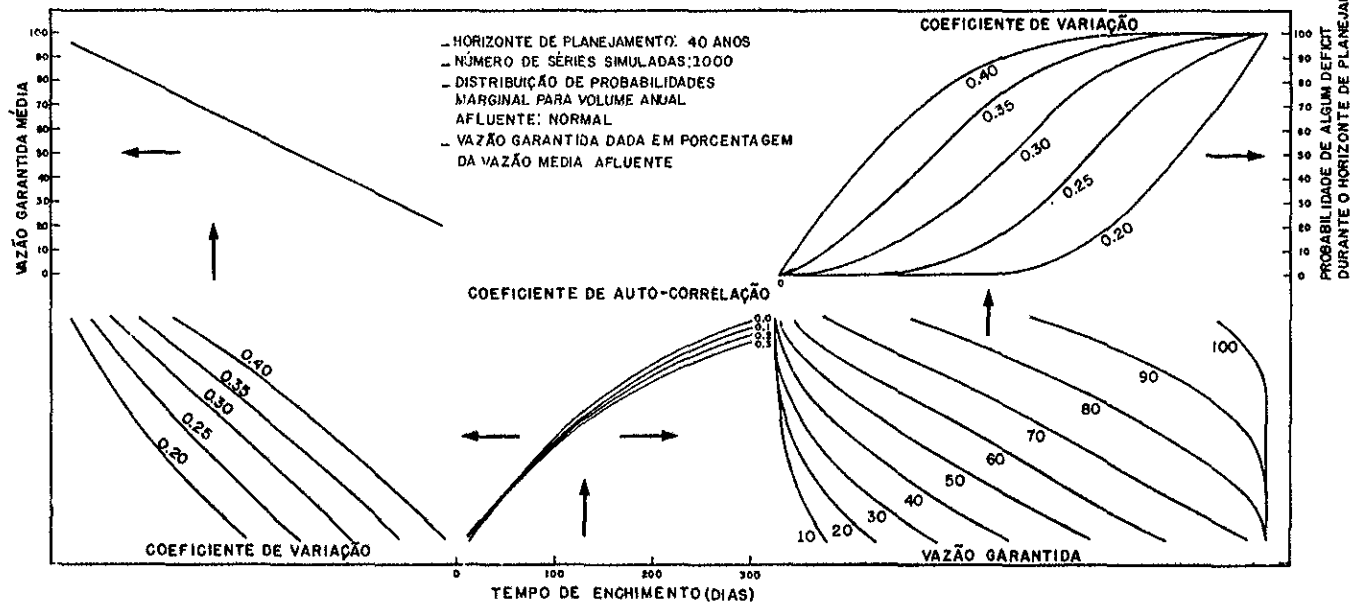


FIGURA 2. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA VAZÃO GARANTIDA